

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter **brièvement**

Barème : Réponse juste : 1.5 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. Une onde de Mach :

- a. est également une caractéristique de Riemann.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est toujours rectiligne.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. a une pente dépendante du type de gaz (pour même nombre de Mach). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. la pression totale est invariante.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. il n'y a pas de frottements et pas d'échanges de chaleur.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. pression, température, et volume spécifique varient dans le même sens. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :

- a. la vitesse et le nombre de Mach varient dans le même sens. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. des ondes de Mach sont toujours présentes dans le divergent. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. la pression est toujours inférieure à la pression du réservoir même avec une onde de choc dans la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. le col est toujours subsonique ou à Mach 1, quel que soit le fluide. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. une onde de choc droite peut apparaître dans le convergent. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- f. le débit ne dépend que des conditions de réservoir. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

4. Un choc droit dans un gaz parfait :

- a. peut avoir des ondes de Mach de part et d'autre (en amont et en aval). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. génère des conditions en aval différentes selon le type de gaz (pour le même nombre de Mach en amont). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. se déplace toujours à une vitesse supérieure à la vitesse du son du gaz au repos qu'elle traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. peut avoir des écoulements de part et d'autre du choc allant dans le sens opposé pour un choix approprié du référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. augmente la pression, la température, et la masse volumique de l'écoulement incident. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

5. Une onde de choc oblique :

- a. est une onde de choc droite pour un observateur se déplaçant le long du choc à une vitesse appropriée. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. peut être avoir d'autres chocs en aval, dans un écoulement permanent. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. a toujours une pente plus grande qu'une onde de Mach (pour le même nombre de Mach). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. est toujours ancrée à un dièdre dans un écoulement supersonique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:

- a. diminue toujours la pression.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est isentrope.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. ne peut se produire qu'en écoulement supersonique.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

Barème : Ex 1: 22 pts ; Ex 2 : 20 pts, Ex 3 : 22 pts

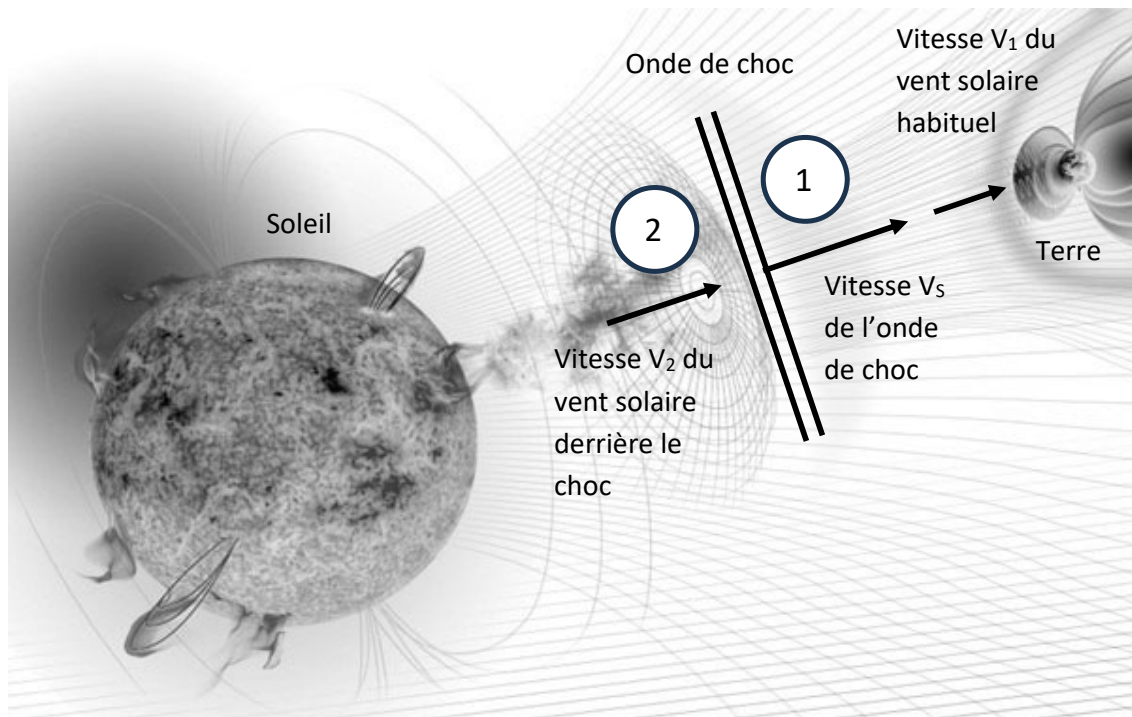
Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués.

1. Eruptions Solaires

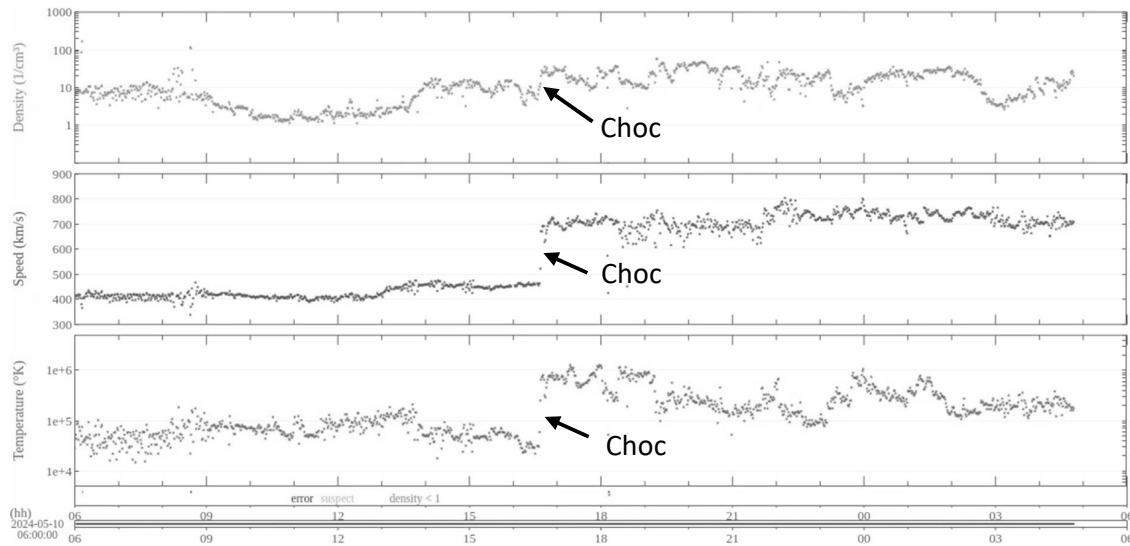
En mai 2024, plusieurs éruptions solaires (Coronal Mass Ejections, CME) se sont produites, donnant lieu à des aurores boréales jusqu'en Suisse.

Le soleil émet en permanence un vent solaire de protons (et d'électrons), de vitesse V_1 de plusieurs centaines de km/s (par rapport au repère soleil-terre considéré comme stationnaire). Lors d'un événement CME, une grande quantité de matière est éjectée, produisant alors une onde de choc de vitesse V_s entraînant des vents à vitesse V_2 (plus grande que V_1). Les vitesses sont évaluées dans le repère soleil-terre (considéré comme stationnaire).



Le vent solaire est un gaz assez chaud ($10^4 K - 10^6 K$!), dont le constituant principal est le proton, c'est-à-dire un atome d'hydrogène H dénué de son électron (à cause de la température). La température est juste une mesure de l'énergie cinétique d'agitation thermique de ces protons.

Le 10 Mai 2024, les données suivantes ont été enregistrées pour la densité des particules de gaz (nombre de particules par centimètre cube), la vitesse du vent solaire (kilomètres par seconde), et la température (kelvin).



Les valeurs suivantes en amont (1) et en aval (2) du choc ont été enregistrées :

| | | |
|---------------|------------------------|------------------------|
| Température : | $T_1 = 4 \cdot 10^4 K$ | $T_2 = 2 \cdot 10^6 K$ |
| Vitesse : | $V_1 = 480 km/s$ | $V_2 = 700 km/s$ |
| Densité : | $n_1 = 5 cm^{-3}$ | $n_2 = 20 cm^{-3}$ |

Le vecteur vitesse du vent solaire dans le repère soleil-terre est toujours dans le même sens, c'est-à-dire du soleil vers la terre (voir schéma sur la page précédente).

- a. Justifier le fait que, pour ce gaz de particules solaires, le rapport de chaleur spécifique ait la valeur :

$$\gamma = 1.67 = 5/3$$

- b. En utilisant le rapport de températures de part et d'autre du choc, montrer (en citant la formule) que le nombre de Mach de l'écoulement en amont du choc, dans un repère fixe par rapport au choc, est égal à : $M_{n,1} = 12,51$.

- c. Pour un choc fort ($M_{n,1} \gg 1$), montrer les relations suivantes :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{n,1}^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M_{n,1}^2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

$$M_{n,2}^2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$$

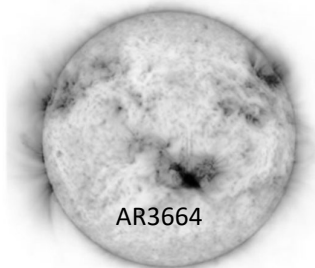
- d. A partir des relations pour choc fort, évaluer le nombre de Mach $M_{n,1}$ dans le repère du choc, et montrer ainsi que cette valeur est cohérente avec la valeur exacte.
- e. Vérifier à partir du rapport de densités mesurées que le choc est bien un choc fort. NB : la densité massique (masse volumique) peut s'obtenir à partir de la densité numérique (nombre de particules par unité de volume) en utilisant la masse du proton (car la masse de l'électron est négligeable) : $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
- f. Evaluer le nombre de Mach $M_{n,2}$.
- g. Trouver la vitesse du son (isentrope) dans ce gaz en amont et en aval du choc. La masse molaire est celle de l'hydrogène atomique H , donc 1 g/mol , car la masse de l'électron est négligeable. NB : en fait à cause du rayonnement, le milieu est isotherme et la vitesse du son est généralement évaluée avec la formule *isotherme* de propagation du son (celle qu'on utilisait avant 1820) – mais on restera avec la vitesse du son isentrope.
- h. Evaluer les vitesses du vent solaire par rapport au choc, $w_{n,1}$ et $w_{n,2}$, à partir des nombres de Mach $M_{n,1}$ et $M_{n,2}$ et des vitesses du son évaluées précédemment. Montrer que l'on a bien $\rho_1 \cdot w_{n,1} = \rho_2 \cdot w_{n,2}$.
- i. Montrer la formule théorique générale : $w_{n,1} - w_{n,2} = V_2 - V_1$.
- j. Pour un choc fort, montrer que :

$$\frac{w_{n,1} - w_{n,2}}{\sqrt{\gamma r T_1}} = \frac{2}{\gamma + 1} M_{n,1}$$

et que la différence $V_2 - V_1$ mesurée satisfait bien cette équation.

- k. Evaluer la vitesse du choc V_S dans le repère soleil-terre, de deux manières, à partir de $w_{n,1}$ et V_1 , et à partir de $w_{n,2}$ et V_2 , en montrant que la valeur est cohérente.
- l. Estimer ainsi le temps de trajet de l'information d'une explosion solaire, du soleil jusqu'à la terre, et montrer qu'elle est cohérente avec la réalité. Le front du choc de la première éruption AR3664 a été observé sur le soleil le 8 mai 2024 en début d'après-midi (heure GMT), et les aurores ont été vues sur terre le 10 mai 2024 en début de soirée GMT. NB : la distance soleil-terre est de $149 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Remarque : le choc sur le graphe précédent a été détecté le 10 mai à 16 :36 GMT par des satellites situés aux points Lagrangiens, en amont de la terre.

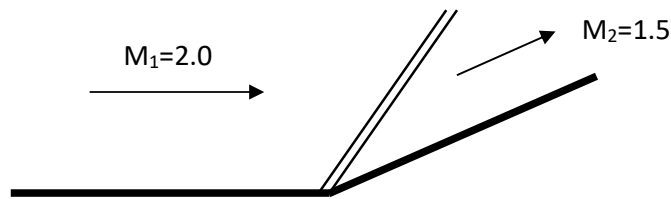


2. Entrée d'air supersonique

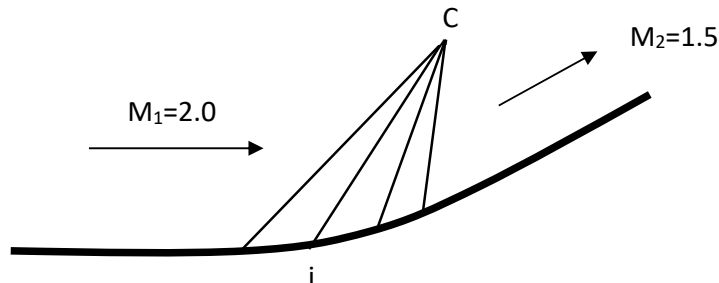
Les avions supersoniques modernes utilisent une compression isentrope dans leurs entrées d'air. Les rampes de compression n'ont pas d'arêtes vives et la compression se fait à travers un faisceau d'ondes de Mach.

L'objectif est de pouvoir ralentir un écoulement de Mach 2 à Mach 1.5. Le gaz est de l'air considéré comme un gaz parfait avec $\gamma = 1.4$.

- a. Conception d'une rampe avec une onde de choc oblique.
 - i. Sans connaissance préalable de l'angle de la rampe et de l'angle du choc, décrire qualitativement la procédure de résolution à partir des équations du formulaire (ne pas essayer de résoudre le problème analytiquement).
 - ii. Montrer qu'un angle de rampe $\delta = 13.67^\circ$ fournit la bonne solution et évaluer l'angle du choc.
 - iii. Evaluer le rapport de pressions statiques et le rapport de pressions totales de part et d'autre de l'onde de choc oblique.



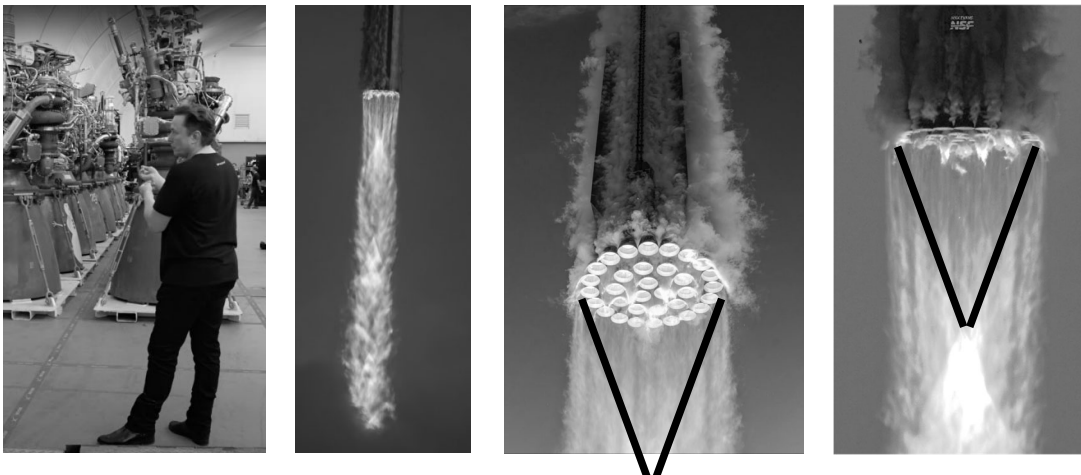
- b. Conception d'une géométrie de compression isentrope.
 - i. Trouver l'angle de l'écoulement en sortie de compression, ainsi que l'angle de l'onde Mach en entrée et en sortie de compression.
 - ii. Evaluer le rapport de pressions statiques et le rapport de pressions totales à travers l'onde de compression.
 - iii. Expliquer en détail comment concevoir la forme de la rampe (en 2D), afin que les ondes de Mach convergent toutes en un point C afin d'éviter des réflexions. Ne pas faire de calculs, mais expliciter l'algorithme en choisissant un point i le long de la rampe et en donnant le lien entre l'angle de la paroi en ce point et l'angle de l'onde de Mach correspondante.



3. Space X Starship

Le 9 Novembre 2023, SpaceX Starship a effectué son deuxième lancement. Le Super Heavy Booster a utilisé 33 tuyères Raptor de 2ème génération. Une seule tuyère (convergente-divergente) développe une poussée de $2.25 \times 10^6 \text{ N}$ et une vitesse de sortie des gaz de $3'200 \text{ m/s}$. La pression de réservoir (dans la chambre de combustion d'une tuyère) est de 300 bar (!) c'est-à-dire $3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. Le moteur brûle un mélange de méthane et d'oxygène, produisant une température de combustion dans le réservoir égale à $4'860 \text{ K}$. Les produits de la combustion sont un mélange d'eau et de gaz carbonique, de masse molaire égale à 27 g/mol . On considère le gaz s'écoulant dans la tuyère comme parfait avec $\gamma = 1.3$.

- La poussée dans des conditions idéales est égale au débit massique des gaz multiplié par la vitesse de sortie des gaz. Evaluer le débit massique dans une tuyère.
- Calculer le diamètre du col en supposant qu'il y a blocage sonique.
- En supposant un écoulement isentrope jusqu'en sortie, évaluer la température, le nombre de Mach, la pression, et le diamètre de la tuyère en sortie, ainsi que le rapport d'aires entre la sortie et le col pour une tuyère.
- Au décollage, quand la pression ambiante est la pression atmosphérique prise égale à $1.0325 \times 10^5 \text{ Pa}$, montrer qu'une onde de choc oblique se forme en sortie, et en supposant un écoulement 2D, trouver l'angle de cette onde de choc oblique.
- Des photos prises au décollage révèle un choc conique pour l'ensemble des 33 tuyères. Si on assimile cet écoulement à un écoulement 2D, l'angle de cette onde de choc oblique est autour de 20 degrés par rapport à l'écoulement (voir photo ci-dessous). Comparer avec votre calcul de la question précédente pour une seule tuyère et commenter.



① a) Comme le gaz est monoatomique, $f = 3$
 ↑
 degrés de liberté

$$\rightarrow \gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} = 1,67$$

② b) F.86 : $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 \frac{1}{M_{n,1}^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2\right) \left(\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\right)$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ K}}{4 \cdot 10^4 \text{ K}} = 50 \quad M_{n,1} = 12,51$$

③ c) $\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n,1}^2 - 1) \rightarrow \lim_{M_{n,1} \rightarrow \infty} \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{n,1}^2$

$$\lim_{M_{n,1} \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2 \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \gamma M_{n,1}^2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_{n,1}^2$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_{n,1}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2} \rightarrow \lim_{M_{n,1} \rightarrow \infty} \frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \rightarrow \lim_{M_{n,1} \rightarrow \infty} M_{n,2}^2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$

④ d) $M_{n,1} = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1}\right)^{1/2} = 12,62$

⑤ e) $\frac{P_2}{P_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{20 \text{ cm}^{-3}}{5 \text{ cm}^{-3}} = 4 \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{5/3+1}{5/3-1} = 4$

⑥ f) $M_{n,2} = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{1/2} = 0,448$

⑦ g) $r = \frac{R}{M_0} = \frac{8'314}{1} = 8'314 \text{ J/kg.K}$

$$a_1 = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_1} = 23'566,4 \text{ m/s}$$

$$a_2 = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T_2} = 166'640 \text{ m/s}$$

⑧ h) $w_{n,1} = M_{n,1} \cdot a_1 = 297'426 \text{ m/s}$

$$w_{n,2} = M_{n,2} \cdot a_2 = 74'635 \text{ m/s}$$

$$\frac{w_{n,1}}{w_{n,2}} = 3,985$$



$$\begin{aligned} w_{n,1} &= V_s - V_1 \\ w_{n,2} &= V_s - V_2 \end{aligned} \Rightarrow w_{n,1} - w_{n,2} = V_2 - V_1$$

(j)

$$\begin{aligned} \frac{w_{n,1} - w_{n,2}}{\sqrt{\gamma R T_1}} &= M_{n,1} - M_{n,2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \\ &= M_{n,1} - \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}} M_{n,1} \\ &= M_{n,1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_{n,1} = \frac{2}{\gamma+1} M_{n,1} \end{aligned}$$

$$\rightarrow w_{n,1} - w_{n,2} = \frac{2}{\gamma+1} M_{n,1} \cdot a_1 = \frac{2}{\gamma+1} w_{n,1} = 222'791 \text{ m/s}$$

$$V_2 - V_1 = 700'000 - 480'000 = 220'000 \text{ m/s} \quad \swarrow$$

(k)

$$\begin{aligned} V_{s,1} &= V_1 + w_{n,1} = 480'000 + 297'426 = 777'426 \text{ m/s} \\ V_{s,2} &= V_2 + w_{n,2} = 700'000 + 74'635 = 774'635 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(l)

$$\Delta t = \frac{149 \cdot 10^3 \text{ m}}{777'426 \text{ m/s}} = 191,658 \text{ s}$$

$$\rightarrow \Delta t = 2,2 \text{ jours}$$

②

① (i) Avec F.101 :
$$\mu_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\theta - \delta)} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \theta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \theta - \frac{\gamma-1}{2}}$$

F.102 :
$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}$$

Connaissant M_1 et M_2 , on peut résoudre pour θ et δ .

(ii) Avec $\delta = 13,67^\circ$, on peut utiliser le graphe des ondes de choc oblique avec $M_1 = 2$

(ou résoudre numériquement F.102 pour θ)

→ $\theta = 43,63^\circ$ (numériquement)

(iii) On peut utiliser les tables pour choc droit avec :

$$M_{n,1} = M_1 \sin \theta = 1,38$$

ou la formule :
$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2,06$$

A partir des tables :
$$\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = 0,96$$

② (i) Prandtl-Meyer flow

$$\nu(M_1 = 2) = 26,38^\circ$$

$$\nu(M_2 = 1,5) = 11,91^\circ$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta &= \nu(M_1) - \nu(M_2) \\ \Delta \delta &= 14,47^\circ \end{aligned}$$

(ii) $P_{0,1} = P_{0,2} = P_0$

$$M_1 = 2 \rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 0,1278$$

$$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 2,13$$

$$M_2 = 1,5 \rightarrow \frac{P_2}{P_0} = 0,2724$$

(iii) On peut trouver le point d'intersection en prenant la première onde de Mach

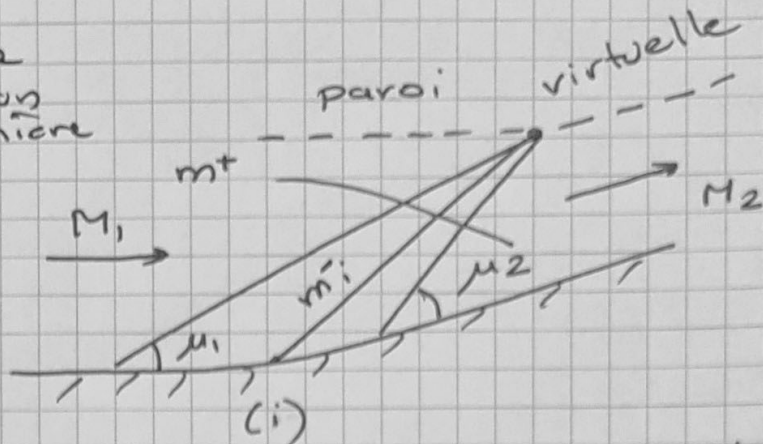
$$\sin \mu_1 = \frac{1}{M_1}$$

et la dernière onde de Mach

$$\sin \mu_2 = \frac{1}{M_2}$$

avec μ_2 mesuré par rapport à la paroi en sortie

($\Delta S = 14,47^\circ$, voir (i))



On demande que toutes les ondes de Mach (caractéristiques m^-) émanent de ce point d'intersection.

On a montré en classe que ces caractéristiques sont rectilignes (voir ci-dessous).

La paroi est en fait une ligne de courant tangentielle partout au vecteur vitesse de l'écoulement.

Il suffit donc de trouver la direction de l'écoulement le long de chaque caractéristique (i).

Comme les caractéristiques m^+ émanent toutes de la région ①, alors :

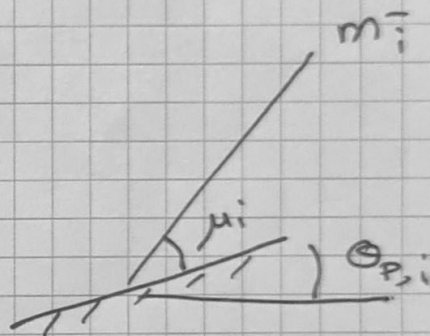
$$\nu + \Theta = \text{constante} = \nu(M_1)$$

le long de m^- : $\Theta_i - \nu(M_i) = \text{const}$

Comme $\nu(M_i) + \Theta_i = \nu(M_1)$

alors $\Theta_i = \text{constante} = \Theta_{p,i}$

(angle de la paroi qui intersecte la caractéristique i)



Pour chaque caractéristique i, l'angle total S_i

$S_i = \mu_i + \Theta_{p,i}$ est connu géométriquement car on sait d'où émane la caractéristique i

Il faut donc résoudre deux équations à deux inconnues pour chaque caractéristique (i) :

$$\begin{cases} \mu_i + \Theta_{p,i} = S_i \\ \nu(M_i) + \Theta_{p,i} = \nu(M_1) \end{cases}$$

avec $\sin \mu_i = \frac{1}{M_i}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_i - \nu(M_i) = S_i - \nu(M_1)}$$

\Rightarrow trouver μ_i puis $\Theta_{p,i}$ correspondant.

$$\textcircled{3} \textcircled{a} \quad \dot{m} = \frac{2,25 \times 10^6 \text{ N}}{3'200 \text{ m/s}} = 703,1 \text{ kg/s}$$

$$\textcircled{b} \quad \frac{\dot{m}^* \sqrt{r T_0}}{p_0 A^*} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad \text{avec } \dot{m}^* = \dot{m}$$

$$r = \frac{8'314}{27} = 307,9 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$T_0 = 4'860 \text{ K}, \quad p_0 = 3 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\gamma = 1,3, \quad A^* = \pi \frac{d^{*2}}{4}$$

$$\rightarrow d^* = 0,234 \text{ m}$$

$$\textcircled{c} \quad c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2 \quad \text{avec } u = 3'200 \text{ m/s}$$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} r$$

$$\rightarrow T = 1'022,9 \text{ K}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \rightarrow M = 5,0$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow p = 35'021 \text{ Pa}$$

$$(\text{avec les tables et } M = 5,0 \rightarrow \frac{p_0}{p} = 0,0012$$

$$\rightarrow p = 36'000 \text{ Pa})$$

$$\frac{A}{A^*} \approx 46 \rightarrow d = 1,59 \text{ m}$$

$$\textcircled{d} \quad \frac{p_{\text{atm}}}{p} = \frac{1,0325 \times 10^5}{35'021} = 2,89 \rightarrow M_n = 1,65$$

$$\sin \theta = \frac{M_n}{M} \rightarrow \theta = 19,35^\circ$$

\textcircled{e} Proche de la valeur obtenue en \textcircled{d} !
 \rightarrow demande réflexion !